

БӨРІХАНОВ МЕЙІРХАН БАТЫРХАНҰЛЫ

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «6D060100-Математика»

Актуальность темы исследования. Дифференциальные операторы дробного порядка вводятся различными способами и поэтому при решении дифференциальных уравнениях дробного порядка и краевых задач в зависимости от рассматриваемых операторов необходимо рассмотреть различные подходы.

Надо отметить также, что использование операторов дробного порядка позволяет глубже понять известные результаты теории функций и краевых задач, и получить новый класс решений, позволяющий охватить широкий круг задач.

В 1827 г. шотландский ботаник Р. Браун, наблюдая хаотическое движение частиц пыльцы в капле воды, открыл новый тип движения, названный позднее его именем, - броуновское движение. Основные законы броуновского движения - гауссова форма диффузионного пакета и его расплывание по закону $t^{1/2}$ - казались столь же универсальными (хотя, понятно, не столь фундаментальными), как и законы Ньютона. Однако в 1926 году Л. Ричардсон обнаружил, что в условиях турбулентной среды диффузионный пакет расплывается по закону $t^{3/2}$. Позднее этот процесс был назван супердиффузией. Другой тип отличной от нормальной диффузии - субдиффузия (замедленная диффузия) - был обнаружен в перколяционных процессах, релаксации твердых материалов, в полимерных структурах, других явлениях и системах. Оказалось, что не только закон расширения, но и сама форма диффузионного пакета и тип уравнения, описывающего эти процессы, существенно отличаются от нормального случая. Этот класс явлений был назван аномальной диффузией или странной кинетикой.

В 90-х годах прошлого века стало ясно, что важное место в теории аномальной диффузии занимают уравнения с дробными производными. Поэтому исследования различных задач для уравнений с дробными производными являются актуальным и с точки зрения прикладной науки.

В целом, одним из основных популярных методов, широко используемых при изучении теории дифференциальных уравнений в частных производных, является принцип максимума и минимума. Данный принцип позволяет получать информацию о решениях без знания сведений об их конкретных формах.

В последнее время в связи с развитием теории дифференциальных уравнений дробного порядка особое внимание стало уделяться принципу максимума.

Одним из актуальных направлений теории нелинейных задач является глобальная разрешимость и разрушения решений за конечное время. Классическая теория глобальной разрешимости нелинейных уравнений посвящена в основном достаточным условиям, обеспечивающим разрешимость соответствующих начальных и краевых задач. Это новое явление в нелинейном глобальном анализе было открыто сравнительно недавно, начиная с классической работы Х. Фуджиты и получило название разрушения решений (blow-up).

В 1966 году японский математик Х. Фуджита доказал существование глобального решения для нелинейного теплового уравнения и установил критический показатель разрушения решения в конечное время. В его честь такой показатель получил название "критический показатель Фуджиты".

На сегодняшний день в многочисленных работах изучены различные обобщения результатов Фуджиты. Критические показатели Фуджиты изучены также для дробных аналогов уравнения диффузии и нелинейного интегрального уравнения диффузии.

Актуальность выбранной темы исследования подтверждается стремительным развитием исследований в данном направлении, а также включением многочисленных публикации по дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка в авторитетные международные базы данных Web of Science, Scopus, MathSciNet и др.

Цель диссертационной работы. Исследование регулярных и сингулярных решений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений дробного порядка.

Для достижения цели диссертационной работы рассмотрены следующие основные задачи исследования:

- исследование принципа максимума и минимума для уравнения диффузии, с дифференциальными операторами дробного порядка в смысле Риман-Лиувилля, Капуто-Фабрицио и обобщенного Капуто-Фабрицио;

- получение аналога принципа Дьюамеля для линейного уравнения диффузии дробного порядка;
- исследования существования локальных решений для нелокальных и для нелинейных уравнений диффузии с весом и систем уравнений;
- исследование локальной и глобальной разрешимости экспоненциального нелинейного уравнения диффузии дробного порядка и систем уравнений;
- нахождение условий отсутствия глобального решения для полиномиального нелинейного уравнения диффузии и системы уравнений дробного порядка, т. е. определения критических показателей типа Фуджита.

Объект исследования. Объектом исследования являются начально - краевые задачи для уравнений диффузии с дифференциальными операторами дробного порядка в смысле Римана - Лиувилля, Капуто - Фабрицио и обобщенного Капуто - Фабрицио. А также рассмотрение интегро - дифференциальных уравнений и системы уравнений дробного порядка с экспоненциальной и полиномиальной нелинейностью.

Методы научного исследования. При решении задач диссертационной работы за основу были взяты классические методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории функционального анализа.

При исследовании свойств решений нелинейных интегро - дифференциальных уравнений диффузии использованы различные методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и нелинейного анализа.

Приведем некоторые методы, которые планируются к использованию решений поставленных задач.

Для доказательства существования локальных решений используются:

- Метод сведения к интегральным уравнениям и принцип Дьюамеля;
- Методы сжимающих отображений;
- Методы дробных исчислений;
- Теоремы о неподвижных точках.

Существования глобальных решений будут доказаны с помощью методов:

- Метод фундаментальных решений и метод функций Грина;
- Неравенства для дробных производных;
- Теоремы о неподвижных точках;

Исследования разрушения решения используется:

- Метод тестовых функции;

Научная новизна работы. Линейные и нелинейные задачи математической физики, с производными дробного порядка рассмотренные в данной диссертационной работе являются новыми и охватывают классические линейные задачи, а также класс нелинейных задач с существенными применениями. Рассматриваемые вопросы в основном не изучены или изучены только для частных случаев. Поэтому научно-исследовательская работа обобщает известные результаты.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Тема исследования носит преимущественно теоретический и фундаментальный характер. Поэтому научная значимость работы связана с использованием глубоких, современных результатов теории дифференциальных операторов и созданием новых собственных методов исследования и анализа.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 12 работ, в том числе 2 публикации в рейтинговых научных журналах, индексируемый в базе данных Web of Science и Scopus, 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованные Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 2 публикации на правах рукописи, 1 публикация в отечественном журнале, 4 публикации в материалах зарубежной международной научной конференции.

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикация в рейтинговом научном журнале

1 M. Borikhanov, M. Kirane, B. T. Torebek. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations with Cauchy-Dirichlet conditions // Applied Mathematics Letters, - 2018. - V. 81, - P. 14-20. Web of Science Impact factor=3,8(Q1), JIF Percentile=98, Scopus SJR=1,4(Q1), CiteScore=5,7, Scopus Percentile=94.

2 Borikhanov M., Torebek B. Local existence and global nonexistence results for an integro-differential diffusion system with nonlocal nonlinearities // Mathematical Methods in the Applied Sciences - 2020. - P. 1796-1811. doi.org/10.1002/mma.6878 Web of Science Impact factor=1,6(Q2), JIF Percentile=74, Scopus SJR=0,6(Q1), CiteScore=2,8, Scopus Percentile=87.

ККСОН

1 M. Borikhanov, B. T. Torebek. Maximum principle and its application for the sub-diffusion equations with Caputo-Fabrizio fractional derivative // Математический журнал. - 2018. - Т. 18, № 1. - С. 43-52.

2 Borikhanov M., Torebek B. Critical exponents of Fujita type for certain time-fractional diffusion equations // International Journal of Mathematics and Physics. - 2018. - V. 9, No. 2. - P. 43-49.

3 M. B. Borikhanov. Mild solution to integro-differential diffusion system with nonlocal source. //Kazakh Mathematical Journal. - 2020. - Vol. 20, No. 1. - P. 18-26.

На правах рукописи

1 Borikhanov M., Torebek B. Local and blowing-up solutions for an integro-differential diffusion equation and system. arXiv:1910.06989.

2 M. Borikhanov, M. Kirane, B. T. Torebek. Globally unsolvability of integro-differential diffusion equations with exponential nonlinearity. Researchgate. DOI: 10.13140/RG.2.2.18342.14409

Отечественное издание

1 Borikhanov M.B. Critical exponents of Fujita type for system of time-fractional diffusion equations. // Известия МКТУ имени Х.А.Ясави, Серия мат., физ., инф. - 2018. - Т. 3, №6. - С. 23-35.

Публикации в материалах международных конференций

1 M. B. Borikhanov. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional Stokes's first problem // Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day. Almaty, April 10, - 2018. - P. 27.

2 Borikhanov M.B. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции «Понтрягинские чтения - XXIX», посвященной 90 - летию Владимира Александровича Ильина (2-6 мая 2018 г.) - 2018. Москва. - С. 251-252.

3 M. Borikhanov. Duhamel principle for the time-fractional diffusion equation in unbounded domain // Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). - 2018. 6-9 September. Near East University, Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey. - P. 129.

4 Borikhanov M. Local existence and global non-existence for the integro-differential diffusion equation // International Conference “Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra”. - 2019. Nur-Sultan - P. 86.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключение и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 102 страниц. Список литератур состоит из 55 наименований.

Основное содержание диссертации. В первой главе работы для уравнения диффузии с производной дробного порядка $D_{0t}^{1-\alpha}$ в смысле Римана-Лиувилля рассмотрена начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta_x D_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) + F(x,t), & (x,t) \in (0,a) \times (0,T] = \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,a], \\ u(0,t) = \lambda(t), \quad u(a,t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, $F(x,t)$, $\varphi(x)$ непрерывные функции.

Также рассматривается начально-краевая задача для уравнения диффузии с дифференциальным оператором дробного порядка с оператором ${}_{CF} D_{0t}^{1-\alpha}$ - в смысле Капуто – Фабрицио

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} {}_{CF} D_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) + F(x,t), & (x,t) \in (0,a) \times (0,T] = \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,a], \\ u(0,t) = u(a,t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, $F(x,t)$, $\varphi(x)$ непрерывные функции и $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$.

Кроме того, рассмотрена начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка во времени с обобщенным дробным производным ${}_{CF}^* D_{0t}^{1-\alpha}$ в смысле обобщенного Капуто – Фабрицио

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} {}_{CF}^* D_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) + F(x,t), & (x,t) \in (0,a) \times (0,T] = \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,a], \\ u(0,t) = \lambda(t), \quad u(a,t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, $F(x,t)$, $\varphi(x)$, $\lambda(t)$, $\mu(t)$ непрерывные функции, а также $\lambda(t)$, $\mu(t)$ неубывающие функций. Для этих задач изучены принципы максимума и минимума.

В качестве приложения полученных результатов, доказаны единственность решений уравнений линейной и нелинейной диффузии, а также непрерывная зависимость решений от исходных заданных.

Во второй главе получен аналог принципа Дьюамеля для уравнения диффузии дробного порядка во времени:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x D_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) = f(x,t), & 0 < \alpha < 1, \quad x \in R^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in R^N, \end{cases}$$

здесь $u_0(x)$ и $f(x,t)$ заданные функции.

Также исследовано существование локальных решений нелокальных уравнений и нелинейных систем уравнений диффузии с весом.

Применяя, аналог принципа Дюамеля, с учетом свойств функции Грина уравнении диффузии дробного порядка во времени и теореме о неподвижной точке Банаха доказана, что задача имеет единственное локальное интегральное решение.

В третьей главе для полиномиального нелинейного уравнения диффузии и системы уравнений дробного порядка определены условия разрушения (взрыва) глобального решения, т. е. определены значения критических показателей типа Фуджита.

Методом пробных функций, а также методом вычисления дробного порядка и неравенств для производных дробного порядка были найдены критические показатели типа Фуджита уравнение и системы уравнений.

Исследовано отсутствие глобального решения уравнений и систем уравнений диффузии дробного порядка с экспоненциальной нелинейностью. Методом пробных функций для указанных уравнений и систем уравнений доказано отсутствие глобального решения.